ポテンシャルエネルギーと力

ここでは，本文の p.13 で触れた「ポテンシャルエネルギーと力」について，もう少し一般的に説明する．

３次元空間上に質点（粒子）があり，何らかの力 $\boldsymbol{f}$ を受けているとする．力 $\boldsymbol{f}$ は３次元空間における方向を持った量なので，ベクトル量である．その成分を f_x, f_y, f_z とする．一般には，力 $\boldsymbol{f}$ は，質点の置かれた位置 $\boldsymbol{r}\,(=x, y, z)$，質量，時間など，さまざまなものに依存する．今この粒子を，ある経路に沿って，空間上の点，A から B へ移動させたとする．移動に従って，一般的に力 $\boldsymbol{f}$ は変化する．その際，次の積分

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z\right) \tag{1}$$

が<u>積分の途中経路によらないとき</u>，この力 $\boldsymbol{f}$ を**保存力**（conservative force）と呼ぶ．ここで $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ は経路に沿った微小線分である．保存力の例としては，重力（万有引力），静電気力などがあり，保存力ではない力（非保存力）には，動摩擦力や空気抵抗などがある．

空間上に定めた基準点 O に粒子があり，保存力 $\boldsymbol{f}$ を受けているとする．それだけではこの粒子は力 $\boldsymbol{f}$ によって加速度を得て点 O から離れて行ってしまうが，さらに保存力 $\boldsymbol{f}$ に釣り合う力 $\boldsymbol{f}'\,(=-\boldsymbol{f})$ を加えて移動を止めたとする．力 $\boldsymbol{f}'$ は保存力である必要は無い．単純に「手で支える力」でも構わない．この状態で粒子を基準点 O から別の点 A まで移動させたとする（厳密には，力 $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{f}'$ が釣り合っているなら粒子は永遠に基準点 O に止まったままだが，更に微小な力を余分に加え，事実上無限の時間をかけて移動させたとする）．この時に力 $\boldsymbol{f}'$ が粒子になした仕事を $W_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}}$ とする．つまり

$$W_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{f}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

である．これをこの粒子の，位置 A におけるポテンシャルエネルギー $V(\mathrm{A})$ とする．よって，

$$W_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = V\left(\mathrm{A}\right) \tag{3}$$

である．つまり，ポテンシャルエネルギー $V(\mathrm{A})$ は，保存力 $\boldsymbol{f}$ を受けている粒子を基準点 O から A まで移動させるのに必要な仕事である．

次に，この粒子が点 A から点 B に移動する間に，<u>保存力 $\boldsymbol{f}$ がする仕事</u>を考える．これを $W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ とすると，保存力の積分は経路によらないので，途中で基準点 O を通るように経路を選べば，次のように書ける．

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{O}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{A}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\mathrm{O}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) \tag{4}$$

この式が示しているのは，「点 A から B まで移動する間に保存力 $\boldsymbol{f}$ が粒子にする仕事は，その粒子のポテンシャルエネルギー V の減少に等しい」ということである．

改めて，ある座標 $\boldsymbol{R}$ におけるポテンシャルエネルギー $V(\boldsymbol{R})$ は次のように書ける．

$$V(\boldsymbol{R}) = -\int_{\mathrm{O}}^{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{f}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{O}}^{\boldsymbol{R}} \left(f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z\right) \tag{5}$$

これを微分形で書くと，次のようになる．

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial V(\boldsymbol{R})}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial V(\boldsymbol{R})}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial V(\boldsymbol{R})}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{6}$$

これら(5)式と(6)式が，力 $\boldsymbol{f}$ とポテンシャルエネルギー V の関係である．