簡単な微分方程式

物理学で扱う量の中には、互いに微分や積分の関係になっているものが多い。例えば1次元の x 方向への運動を考えると、速度 v は単位時間内に移動する距離であり、加速度αは単位時間内の速度の変化であるので、それぞれ、

$$v=\frac{dx}{dt}、\qquad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

と表すことができる。また、力 f はポテンシャル $V(x)$の微分として

$$f=-\frac{dV(x)}{dx}$$

と与えられる。例えば、x の高さにある物体にかかる重力ポテンシャルは mgx であるので、これを x で微分して負号を付けると$-mg$ となる。これは質量 m の物体にかかる下向きの力、すなわち重力である。したがって、落体の運動を記述する場合のニュートンの式$f=m\alpha$ は、

$$-\frac{d(mgx)}{dx}=m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad すなわち、\qquad -mg=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

と書ける。両辺からは m が消えるので、落体の速度は質量には無関係であることが解る。これは2次微分を含む微分方程式である。この式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-g$$

の両辺を積分すると

$$\frac{dx}{dt}=-gt+C_1$$

となり、積分定数 C_1 を決める必要がある。微分方程式を解くときには「境界条件」を使ってこれを決める。例えば初速度がゼロ

$$v_0=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=0$$

という境界条件を用いると、t=0 を代入したとき(dx/dt)=0 であるから、C_1=0 が求められる。これをさらに積分すると

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+C_2$$

が得られる。境界条件として t=0 の時高さ h_0 から球を落下させるということであれば、$C_2=h_0$ となり、落下して t 時間後の位置 x が求まる。これらの取扱から2階の微分方程式では積分を2回するので、2つの積分定数が現れることがわかる。

次に、位置 x の関数 $f(x)$に対する微分方程式

$$\frac{d^2f}{dx^2}-k^2f=0$$

を考えてみよう。このような形を満たす関数として思いつくのは指数関数である。$f=e^{\alpha x}$ を2回微分すると、

$$\frac{d^2(e^{\alpha x})}{dx^2} = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

を得る。これから$\alpha^2 = k^2$、 言い換えれば$\alpha = \pm k$ であることが分かる。e^{kx} も e^{-kx} も共に解であるので、これらを任意の係数で加え合わせた

$$f(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

も解になる。c_1、c_2 は初期条件から決まる 2 つの積分定数と考えてよい。

次に、微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0$$

を考えよう。この場合には上述の解法と同じ手順を踏むと

$$\alpha^2 = -k^2、\quad すなわち \quad \alpha = \pm ik$$

となり、一般解は

$$f(x) = c_1 e^{ikx} + c_2 e^{-ikx}$$

と書ける。ここで、オイラーの式を用いると、

$$f(x) = c_1 (\cos kx + i \sin kx) + c_2 (\cos kx - i \sin kx)$$
$$= a_1 \cos kx + a_2 \sin kx$$

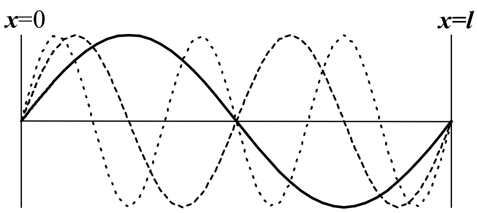
となる。これが一般解である。ただし、a_1、a_2 は複素数を含む定数である。

境界条件として、$x = 0$ で $f(x)=0$ ととると、$a_1 = 0$ で

$$f(x) = a_2 \sin kx$$

さらに、もう一方の端 $x = l$ で $f(x)=0$ の境界条件を加えると $kl = n\pi$であることが必要なので、解として

$$f(x) = a_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)$$



が得られる。一般的に書けば

$$f(x) = \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)$$

が上記の境界条件における解ということになる。

最後に、微分方程式によく出てくる略号を紹介しておこう。空間の(x, y, z)軸方向に 1 次の微分をとった関数をナブラと呼び、

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

で表し、2 次微分をとったものをラプラシアンと呼んでいる。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$