第 1 章　章末問題　解答

1.1

(1-1) 式より，$\nu = \dfrac{c}{\lambda}$,　$E = h\nu$ の関係を用いる。
光速を $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m}$，プランク定数を $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$ とすると，
紫外光（$\lambda = 250\,\mathrm{nm}$）のとき

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{250 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 1.20 \times 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}} \\ E &= (6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}) \times (1.20 \times 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}}) = 7.95 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。同様に
可視光（$\lambda = 500\,\mathrm{nm}$）のとき

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{500 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 6.00 \times 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}} \\ E &= (6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}) \times (6.00 \times 10^{14}\,\mathrm{s^{-1}}) = 3.97 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

赤外光（$\lambda = 4\,\mu\mathrm{m}$）のとき

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{4.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}} = 7.50 \times 10^{13}\,\mathrm{s^{-1}} \\ E &= (6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}) \times (7.50 \times 10^{13}\,\mathrm{s^{-1}}) = 4.97 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

となる。

光速を $c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m}$，プランク定数を $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}$ とすると，
波長 $250\,\mathrm{nm}$ の光子の振動数とエネルギーはそれぞれ $\nu = 1.20 \times 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}}$，$E = 7.96 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ となり，物理定数の桁をどこまで取るか，あるいは，解答途中の計算結果をどの桁で四捨五入するかによって，答えの数値が少し変わるが，解答の本質ではないので気にしなくてもよい。

また，振動数およびエネルギーが波長に反比例することを用いると，与えられた波長の比が $250 : 500 : 4000 = 1 : 2 : 16$ なので，$\lambda = 250\,\mathrm{nm}$ の光子の振動数およびエネルギーを 1 とすると，$1 : 1/2 : 1/16$ となるとして，求めても良い。

1.2

光子のエネルギーは波長に反比例する。波長 $700\,\mathrm{nm}$ は $400\,\mathrm{nm}$ の 1.75 倍であるので，逆に波長 $400\,\mathrm{nm}$ の光子のエネルギーは波長 $700\,\mathrm{nm}$ の光子のエネルギーの 1.75 倍となる。

ちなみに，上の問題 **1.1** と同様に求めると，波長 $400\,\mathrm{nm}$ の光子のエネルギーは

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}) \times (2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}})}{400 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 4.97 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

である。

1.3

等速直線運動では (かかった時間) = (距離) ÷ (速さ) なので，

$$t = \frac{1\,\mathrm{m}}{3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}} = 3.33 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} = 3.33\,\mathrm{ns}$$

1.4

波長 $500\,\mathrm{nm}$ の光子のエネルギーは

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s^{-1}}) \times (3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}})}{500 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}} = 3.978 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

この値を用いて

$$KE = h\nu - W = (3.978 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}) - (3.69 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}) = 2.88 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}$$

が得られる。

1.5

この電子の運動量 p は

$$p = m_{\mathrm{e}}v = (9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \times (1\,\mathrm{m\,s^{-1}}) = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$$

(1-3) 式より

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}} = 7.28 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

が得られる。ここで，$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg\,m^{2}\,s^{-2}}$ の関係を用いた。

1.6

バルマー系列のうち，2 番目に長い波長 (λ_2) の輝線は主量子数 $n = 4$ の軌道から $n = 2$ の軌道への遷移に対応する。したがって，(1-6) 式より

$$\frac{1}{\lambda_2} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = (1.097 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}) \times 0.1875 = 2.057 \times 10^{6}\,\mathrm{m^{-1}}$$

したがって，

$$\lambda_2 = \frac{1}{2.057 \times 10^{6}\,\mathrm{m^{-1}}} = 4.86 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 486\,\mathrm{nm}$$

である。同様に，3 番目に長い波長 (λ_3) の輝線は主量子数 $n = 5$ の軌道から $n = 2$ の軌道への遷移に対応する。したがって，

$$\frac{1}{\lambda_3} = (1.097 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}) \times \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) = 2.304 \times 10^{6}\,\mathrm{m^{-1}}$$

したがって，

$$\lambda_3 = \frac{1}{2.304 \times 10^{6}\,\mathrm{m^{-1}}} = 4.34 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 434\,\mathrm{nm}$$

となる。

1.7

$t = 0$ を代入すると，

$$y = \sin\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$t = \tau$ を代入すると，

$$y = \sin\left(2\pi - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

となり，式が一致するので同じ波形となる。

1.8

1 次元箱の中の粒子の準位エネルギーは (1-9) 式で与えられる。
n に依存しない定数部分をまとめて A とおくと

$$E_n = \frac{h^2 n^2}{8mL^2} = An^2, \qquad A = \frac{h^2}{8mL^2}$$

となる。$n = 1$ のとき $E_1 = A$ となるので，$A = 2.0 \times 10^{-23}\,\mathrm{J}$ である。したがって，

$$\begin{aligned} n = 2 \quad &\text{のとき} \qquad E_2 = A \times 2^2 = 4A = 8.0 \times 10^{-23}\,\mathrm{J} \\ n = 3 \quad &\text{のとき} \qquad E_3 = A \times 3^2 = 9A = 1.8 \times 10^{-22}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

となる。

1.9

1 次元箱の中の粒子の波動関数の節の数は量子数 n よりも 1 小さい。図に示された波動関数の節の数が 9 なので，量子数は $n = 10$ である。

1.10

放出された光電子の運動エネルギー KE は

$$KE = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} v^2 = \frac{1}{2} \times (9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}) \times (2.65 \times 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2 = 3.20 \times 10^{-20}\,\mathrm{J}$$

問題 **1.1** より，波長 500 nm の光子のエネルギーは $3.97 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ なので，仕事関数 W は

$$W = h\nu - KE = (3.97 \times 10^{-19} - 3.20 \times 10^{-20})\,\mathrm{J} = 3.65 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

と求められる。

1.11

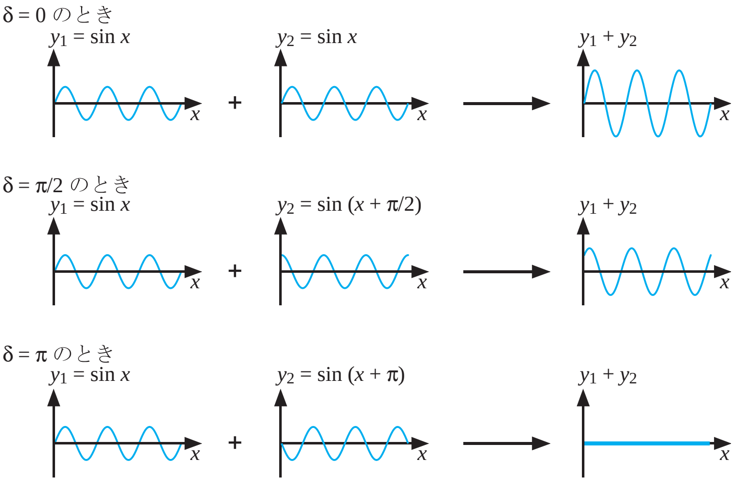
(1-3) より

$$p = \frac{h}{\lambda} = mv$$

したがって

$$m = \frac{h}{\lambda v} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{(1 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}) \times (1\,\mathrm{m\,s^{-1}})} = 6.63 \times 10^{-25}\,\mathrm{kg}$$

1.12



1.13

(1-4)，(1-5) 式から，ライマン系列（主量子数 n の軌道にある電子が $n = 1$ 軌道へ移る遷移）の輝線の波長 λ はリュードベリ定数 R を用いて

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

と表される。ライマン系列で最も長波長の遷移は $n = 2$ からの遷移になるので，

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}) \times \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) = 8.223 \times 10^{6}\,\mathrm{m^{-1}}$$

となるので，その波長は

$$\lambda = 1.216 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} = 121.6\,\mathrm{nm}$$

となる。バルマー系列で最も長波長の輝線の波長は例題 **1.3** より 656.3 nm で，ここで求めた波長の 5.40 倍長い。
光子のエネルギーは波長に反比例するので，ライマン系列で最も長波長の輝線に対応する光子のエネルギーはバルマー系列のものの 5.40 倍大きい。

1.14

1 次元箱の中の粒子の固有エネルギーは n^2 に比例するので，与えられた 3 つのエネルギーの平方根の比をとると，量子数の比になるはずである。

$$\sqrt{11.3} : \sqrt{20.0} : \sqrt{31.2} = 3.36 : 4.47 : 5.59 \approx 3 : 4 : 5$$

したがって，3 つの準位の量子数はそれぞれ，3，4，5 である。

1.15

(1-9) 式より，1 次元箱 A の中の粒子の固有エネルギーは

$$E_n^{\mathrm{A}} = \frac{h^2 n^2}{8mL^2}$$

である。一方，1 次元箱 B の長さを L_{B} とすると，1 次元箱 B の中の粒子の固有エネルギーは

$$E_n^{\mathrm{B}} = \frac{h^2 n^2}{8(2m)L_{\mathrm{B}}^2}$$

となる。今，各 n において，両方の箱の中の粒子の固有エネルギーが等しいことから

$$\frac{h^2 n^2}{8mL^2} = \frac{h^2 n^2}{8(2m)L_{\mathrm{B}}^2}$$

両辺を比較すると，

$$mL^2 = 2mL_{\mathrm{B}}^2, \qquad \therefore L_{\mathrm{B}} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

であることがわかる。

1.16

1 次元箱の中の粒子の波動関数は，(1-10) 式

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

で与えられる。波動関数の規格化条件は

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 = 1$$

である。今，(1-10) 式で与えられる波動関数は実数なので，$|\psi_n(x)|^2 = \psi_n^2(x)$ である。したがって，規格化条件は

$$\begin{aligned}
\int_0^L |\Psi_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_0^L \left\{\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{1-\cos(2n\pi x/L)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\,\frac{1}{2}\left\{\int_0^L \mathrm{d}x - \int_0^L \cos(2n\pi x/L)\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}$$

である。ここで，右辺の 1 つめの積分は

$$\int_0^L \mathrm{d}x = L$$

である。2 つめの積分は積分区間において x が 0 から L まで変化すると cos 関数の引数が 0 から $2n\pi$ まで変化する。これは cos 関数を n 周期積分することに対応するが，cos 関数は 1 周期積分すると 0 になるので，n 周期積分してもやはり 0 である。したがって，

$$\int_0^L |\Psi_n(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{L} \, \frac{1}{2} \, L = 1$$

となり，n の値によらず規格化条件が成立していることが示される。

1.17

$n = 1$ と $n = 2$ の固有関数をそれぞれ $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$ とすると

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \qquad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

である。どちらも実関数なので，

$$\int_0^L \psi_1(x)\psi_2(x)\mathrm{d}x = 0$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left\{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right\} \left\{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L} \, \frac{1}{2} \int_0^L \left\{\cos\left(-\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{L} \left\{\left[-\left(-\frac{\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]_0^L - \left[-\left(-\frac{3\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right]_0^L\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となり，直交性を示すことができる。ここで三角関数の公式

$$\sin A \, \sin B = \frac{1}{2} \left\{\cos(A - B) - \cos(A + B)\right\}$$

を用いた。

1.18

求める積分は

$$\langle x \rangle = \int_0^L x \left\{\sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}^2 \mathrm{d}x$$

である。ここで $\theta = n\pi x/L$ とおくと，$x = \dfrac{L}{n\pi}\theta$，$\mathrm{d}x = \dfrac{L}{n\pi}\mathrm{d}\theta$ となり，積分区間 $x = 0 \to L$ は $\theta = 0 \to n\pi$ となる。したがって，求める積分は

$$\langle x \rangle = \frac{2}{L} \int_0^{n\pi} \frac{L}{n\pi}\theta \sin^2\theta \frac{L}{n\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} \theta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

と書き直すことができる。ここで，**1.17** で用いた三角関数の公式を用いると

$$\langle x\rangle = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi}\frac{\theta}{2}\left(1-\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = \frac{L}{n^2\pi^2}\left\{\int_0^{n\pi}\theta\mathrm{d}\theta - \int_0^{n\pi}\theta\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\right\}$$

となる。右辺第 1 項の積分は

$$\int_0^{n\pi}\theta\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{2}\theta^2\right]_0^{n\pi} = \frac{n^2\pi^2}{2}$$

である。右辺第 2 項の積分は部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi}\theta\cos 2\theta\mathrm{d}\theta &= \left[\theta\,\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi}\frac{1}{2}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= 0 - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{n\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

とそれぞれ計算できる。これらの結果を合わせると

$$\langle x\rangle = \frac{L}{n^2\pi^2}\left\{\frac{n^2\pi^2}{2}+0\right\} = \frac{L}{2}$$

となる。この結果は n に依らないので，$n=1$ 準位でも $n=2$ 準位でもどちらも $\langle x\rangle = \dfrac{L}{2}$ である。

ここでは，計算によって x の平均値 $\langle x\rangle$ を求めたが，図 1.9 に示した粒子の存在確率 $|\psi(x)|^2$ のグラフがいずれも $x=L/2$ に対して左右対称になっていることからも，$\langle x\rangle$ が $L/2$ であることがわかるだろう。