ガウス積分(1)　∽　π や平方根があらわれる∽

　ボルツマン分布に運動エネルギーを考慮する場合など、指数関数の肩に変数の二乗が現れる計算に出会うことがある。序章において誤差の話題にでてきた正規分布（ガウス分布）の面積計算のことだが、その分布関数を規格化する際にこの定積分が必要になる。公式集によると、a を正の定数として、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

とある。答えにπや平方根がある裏には何かありそうな気がする。深遠な数学の奥義はさておき、ここでは答えを導く技術として計算してみよう。

　まず、目的の積分を S とおく。

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

その二乗 S^2 を計算してみる。その際、二つ目の積分の変数を y として区別する。

$$S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2} dy$$

変数が 2 個のこの二重積分、(x,y)を二次元平面の座標とみて、極座標(r,θ)に変数変換して積分を実行する。全平面にわたる積分で、積分範囲が r は 0〜+∞にθは 0〜2πに変わり、面積素片が $dxdy$ から $rd\theta dr$ に置き変わることに気を付けよう。

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \text{（平面極座標）}$$

$$S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ay^2} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dxdy$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-ar^2} rd\theta dr = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-ar^2} dr = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-ar^2} dr$$

角度部分の積分からさっそくπがでてきた。さらに $t = ar^2$ と変数変換して続ける。

$$S^2 = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-t} \frac{dt}{2ar} = \frac{\pi}{a}\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{a}\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a}\{(-0)-(-1)\} = \frac{\pi}{a}$$

うまく r がキャンセルして単純な指数関数の積分となった。最後に両辺の平方根をとって積分 S の値を得る。積分範囲が 0 から+∞の場合は右半分の面積になる。

$$\therefore \quad S = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad , \qquad S' = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$