## ガウス積分(2) ∽ 部分積分で次数を下げる ∽

運動エネルギーの平均値の計算では運動エネルギーの表式にボルツマン因子をかけて積分する。この場合、次のような積分を実行しなくてはならない。

$$S_2' = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx$$

この $x^2$ を 2 つの $x$ の積に分けて、

$$S_2' = \int_0^{+\infty} x \cdot x e^{-ax^2} dx$$

と書くと、後半の積分は変数変換 $t = ax^2$ によって単純な指数関数の積分になることを「ガウス積分(1)」によって知っているので、あとは前にかかる $x$ をなんとかすればよいことがわかる。三角関数の積分のときに加法定理や倍角の公式を使ってべき乗の次数を落として計算するやり方があるが、指数関数の場合は何回積分（微分）しても形が変わらない性質を利用して、部分積分によってそれにかかる関数の次数を下げて計算することができる。

部分積分は積の微分の逆の操作である。

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad \text{（積の微分）}$$

移行して、両辺を積分すると、

$$\int f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)] - \int f'(x)g(x)dx \qquad \text{（部分積分）}$$

という関係が得られる。この第 2 項の微分により次数を下げることができる。

これを $S_2'$ の計算に適用するために、

$$f(x) = x \quad , \quad g'(x) = xe^{-ax^2}$$

とおくと、$t = ax^2$ の変数変換により $g'(x)$ をあらかじめ積分しておくことができて、

$$g(x) = \int g'(x)dx = \int xe^{-ax^2} dx = \int xe^{-t} \frac{dt}{2ax} = \frac{1}{2a}\int e^{-t}dt = -\frac{e^{-t}}{2a} + C = -\frac{e^{-ax^2}}{2a} + C$$

を得る（$C$ は積分定数）。これを踏まえて $S_2'$ を計算する。

$$S_2' = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \int_0^{+\infty} x \cdot xe^{-ax^2} dx = \left[ x \cdot \left( -\frac{e^{-ax^2}}{2a} \right) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left( -\frac{e^{-ax^2}}{2a} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2a}\{(+\infty)\cdot 0 - 0 \cdot 1\} + \frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} S' = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

この最後に残る定積分 $S'$ の評価には「ガウス積分(1)」で導いた結果を利用する。