Maxwell-Boltzmann 分布を用いた平均速度の求め方

3 次元空間を運動する気体分子のマクスウェル―ボルツマン分布は次のように表される。

$$F(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}} (4\pi v^2) dv$$

この分布から平均速度を計算してみよう。

一般に、分布関数（確率密度関数）が $P(x)$で表される系において、物理量 A の平均値$\langle A \rangle$（期待値ともいう）は次のように定義される。

$$\langle A \rangle = \int_{\text{全空間}} AP(x)dx$$

マクスウェル―ボルツマン分布の平均速度$\langle v \rangle$は次の積分を計算すればよい。

$$\langle v \rangle = \int_{\text{全空間}} vF(v)dv = \int_0^\infty v \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}} (4\pi v^2) dv$$

ここで積分範囲は速度空間の全領域にわたるもので、v について 0～∞である。ここで $s = mv^2/2k_{\mathrm{B}}T$ とおいて変形する。$ds = mvdv/k_{\mathrm{B}}T$ なので vdv を置き換える。

$$\begin{aligned}
\langle v \rangle &= 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_{\mathrm{B}}T}} dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2k_{\mathrm{B}} T}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m} s e^{-s} \frac{k_{\mathrm{B}}T}{m} ds \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m}} \int_0^\infty s e^{-s} ds
\end{aligned}$$

最後の定積分は部分積分により実行する。

$$\int_0^\infty s e^{-s} ds = \left[-s e^{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-s}\right) ds = \int_0^\infty e^{-s} ds = \left[-e^{-s}\right]_0^\infty = 1$$

これより、マクスウェル―ボルツマン分布の平均速度は次の通り。

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8k_{\mathrm{B}}T}{\pi m}}$$